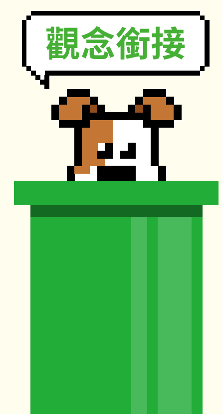
1-3 函數及其圖形

雲端教室

- **函數**：設 x、y 是兩個變數，當 x 值給定時 y 的值也隨 x 值被唯一確定，我們稱這種對應關係為 y 是 x 的函數。若此函數命名為 f，則記作 $y=f(x)$。
- **線型函數**：形如 $f(x)=ax+b$ 的函數稱為線型函數，在坐標平面上其圖形為一直線。
- **二次函數**：形如 $f(x)=ax^2+bx+c$ （$a\neq 0$）的函數稱為二次函數，在坐標平面上其圖形為拋物線。
- 二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 可利用配方法化成

  $y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ 的形式，

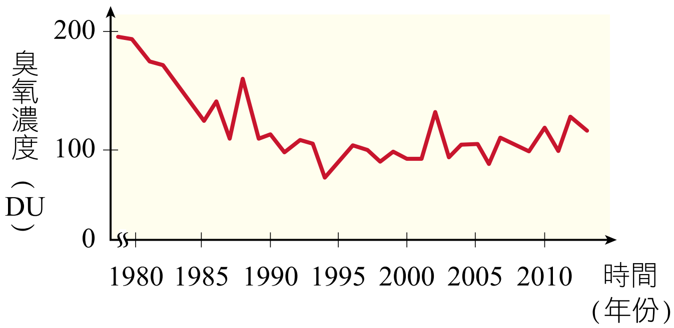
  其頂點坐標為 $\left(-\dfrac{b}{2a},-\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$，對稱軸為 $x=-\dfrac{b}{2a}$。



函數是數學領域中重要的概念，它既是數學研究的對象又是解決數學問題的基礎，其應用已廣泛滲透到日常周遭。如：上網費用依隨用量時間而改變或空氣品質隨著霧霾濃度而變化等，這些關係都可以表成函數。我們來看兩個實例：

一、政府重視保障女性工作權，根據勞委會統計的人力資源狀況，我們假設男性與女性之勞動人口比例為 6：5，則對於兩性勞動參與者我們可以列出一個關係式：若男性就業人口為 x，女性就業人口為 y，則滿足 $y=\dfrac{5}{6}x$ ，可以發現對於男性工作人數 x，會有唯一確定的女性工作人數 y 與之對應。

二、全球暖化是近年來各國相當重視的議題，根據研究，除了二氧化碳濃度不斷升高外，臭氧層的削減也是原因之一。臭氧可以吸收太陽輻射裡對生物有害的紫外線，以屏蔽地球表面生物，不受紫外線侵害，失去它的防護將使地球暴露於更多的輻射線威脅，進而造成溫室效應。下面的臭氧濃度變化圖呈現其逐年的變化情況，關於每一時刻，對照圖中曲線都有唯一確定的臭氧層濃度與之對應。



▲ 圖1

甲、函數的定義

假設 f 是某種**對應關係**且存在兩個變數 x、y，當一方變數 x 決定時，另一方的 y 值也會依照 f 的對應而被**唯一確定**，則稱 y 是 x 的**函數**，記作 $y=f(x)$，其中 x 為**自變數**，y 為**應變數**。討論自變數 x 取值的範圍稱做**定義域**，由 x 依循 f 對應後得到函數值的範圍稱為**值域**。

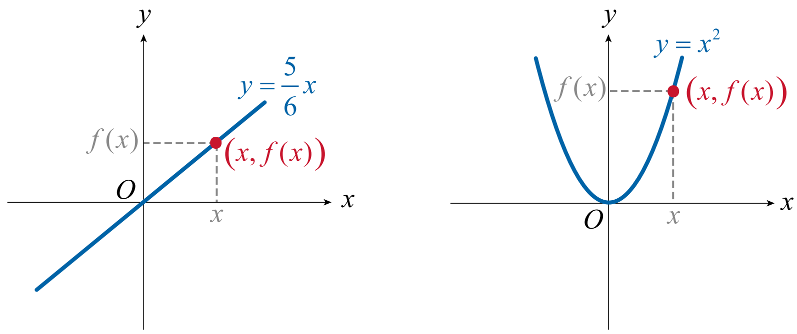
函數說明了兩個變數之間的依存關係，例如：至車站購買車票，每個目的地都恰有一個對應的金額，這就是函數的應用。

動動腦：日常生活中可否觀察到符合函數關係的例子？

函數的表達方式常見有以下兩種：

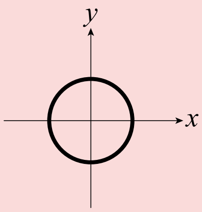
1. 解析法：以代數關係式來表示兩個變數的關係，如：$y=\frac{5}{6}x$，$y=x^2$。

2. 圖示法：將 x 值與函數值 $f(x)$ 表成點坐標 $(x, f(x))$ 描繪於坐標平面上，連結這些點所形成的圖形便是 $y=f(x)$ 的函數圖形，如圖 2。



▲ 圖2

動動腦： 坐標平面上的一個圓是函數圖形嗎？
函數圖形可以是曲線、直線或分散的點等等，
判斷一個圖形是否為函數圖形的依據是什麼？

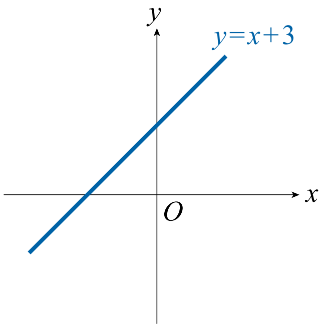


接下來我們來看幾個簡單常見的函數模型，並描繪其圖形在坐標平面上。

乙、線型函數

從國中學習的經驗出發，關於形如 $f(x)=ax+b$（a、b 是實數）的圖形，說明如下：

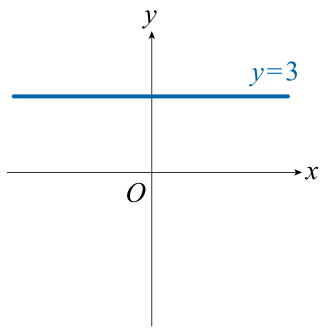
1. 當 $a\neq 0$ 時，$f(x)$ 稱為一次函數，其圖形是一斜直線，如：$f(x)=x+3$，圖形如右：



▲ 圖3

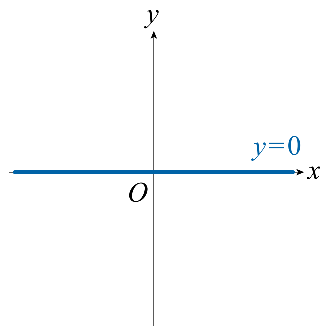
2. 當 $a=0$ 時，$f(x)$ 稱為常數函數，其圖形是一水平直線。

(1) 若 $b\neq 0$，稱為零次函數，
其圖形為平行 x 軸的直線，
如：$f(x)=3$，圖形如下：



▲ 圖4

(2) 若 $b=0$，稱為零函數，
其圖形為 x 軸，
即 $f(x)=0$，圖形如下：



▲ 圖5

一次函數與常數函數的圖形都是直線，合稱為線型函數。

例 1 **試作下列函數圖形：**

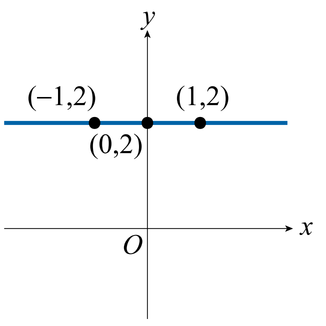
(1) $\boldsymbol{f(x)=2}$　　(2) $\boldsymbol{f(x)=2x-4}$

解 適當選取一些自變數 x 的值
再求出與其對應的函數值 $f(x)$

(1)

x	$\cdots$	-1	0	1	$\cdots$
y	$\cdots$	2	2	2	$\cdots$

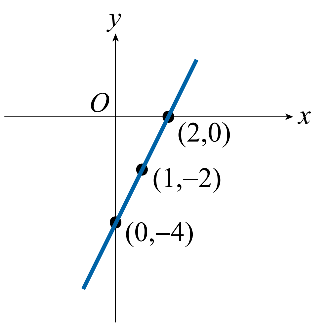
然後將數對 (x,y) 描繪於坐標平面上
如圖所示：
其圖形為平行 x 軸的直線



(2)

x	$\cdots$	0	1	2	$\cdots$
y	$\cdots$	-4	-2	0	$\cdots$

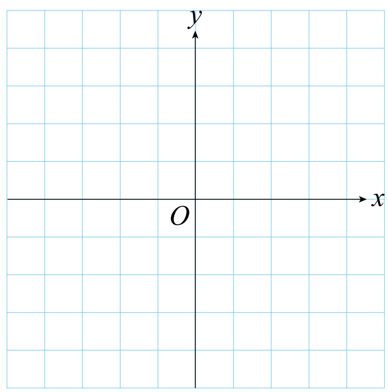
然後將數對 (x,y) 描繪於坐標平面上
如圖所示：
其圖形為一條斜直線



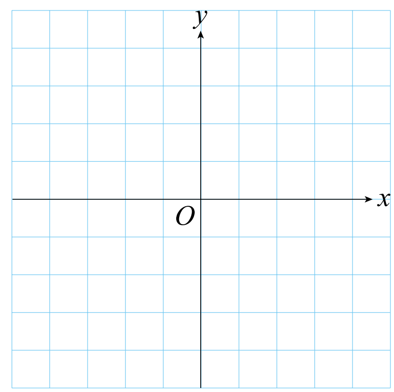
類題

1. 試作下列函數圖形：

(1) $f(x)=-2$



(2) $f(x)=-x+1$



例 2 **已知一次函數 $f(x)$ 之圖形通過 $(-1,2)$ 及 $(3,-6)$，試求 $f(x)$ 並畫出其圖形。**

解 設一次函數 $f(x)=ax+b$（$a\neq 0$）

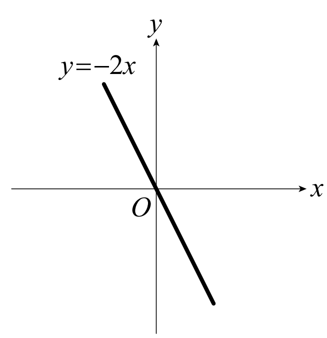
依題意列出聯立方程式 $\begin{cases} 2=-a+b\cdots\cdots ① \\ -6=3a+b\cdots\cdots ② \end{cases}$

將點 $(-1,2)$ 及 $(3,-6)$ 代入函數中

由 ② − ① 得 $4a=-8$，所以 $a=-2$

$a=-2$ 再代回 ① 可找出 $b=0$

故得 $f(x)=-2x$，其圖形如右



類題

2. 設 $f(x)$ 為一次函數，已知 $f(1)=-6$，$f(2)=1$，試求 $f(3)$ 之值。

例 3 **環保署制定節能減碳行動方案中，指出每天製造 1 公斤垃圾約增加二氧化碳排放量 2.1 公斤。假設垃圾增加量與二氧化碳增加量為線性關係，已知一棵樹每天約可吸收 0.03 公斤的二氧化碳，若民眾每天增加垃圾量 x 公斤產生之二氧化碳排放量需要 y 棵樹來減碳，試列出 x 與 y 之關係式。**

解 依題意，每天製造 x 公斤垃圾則增加 $2.1x$ 公斤的二氧化碳排放量

而 y 棵樹可吸收 $0.03y$ 公斤的二氧化碳

因此滿足 $0.03y=2.1x$，得 $y=\dfrac{2.1}{0.03}x=70x$

類題

3. 溫度標準有兩種，分別是攝氏溫度及華氏溫度，已知兩者符合關係式 $y=ax+b$（攝氏：x，華氏：y），且當 $x=0$ 時 $y=32$，當 $x=100$ 時 $y=212$，試列出溫度換算的關係式。

動動腦： 依據例 3，想想每製造 1 公斤垃圾約需種植多少棵樹來減碳？對此數據你有何衝擊？

例 4 **設函數 $f(x)=\begin{cases}2x+3 & ,\ x\geq 0\\ 3 & ,\ x<0\end{cases}$，試求 $f(2)+f(-2)$ 之值。**

解 依分段定義函數中自變數 x 範圍分別代入相對應函數

當 $x=2$ 時對應 $f(x)=2x+3$，代入得 $f(2)=2\times 2+3=7$

當 $x=-2$ 時對應 $f(x)=3$，代入得 $f(-2)=3$

故 $f(2)+f(-2)=7+3=10$

類題

4. 設函數 $f(x)=\begin{cases}1 & ,\ x\geq 0\\ -1 & ,\ x<0\end{cases}$，試求 $f(0)+f(8)+f(-9)$ 之值。

丙、二次函數

近代科學之父伽利略發現了落體運動的性質並做了斜面實驗，得到 S（下落距離）跟 t（時間）平方成正比，後來經由牛頓重力理論的驗證，歸納出物體下落距離之計算公式為 $S(t)=\frac{1}{2}gt^2=4.9t^2$（公尺）（重力加速度 $g=9.8$ 公尺／秒^2），明顯是以二次函數的形式來呈現。

先想想：在國中階段，你對二次函數的認知是什麼？你曾看過什麼圖形像二次函數？

我們把形如 $y=ax^2+bx+c$（a、b、c 是實數且 $a\neq 0$）的函數稱為二次函數，其圖形為拋物線，在此簡單說明二次函數圖形特徵。

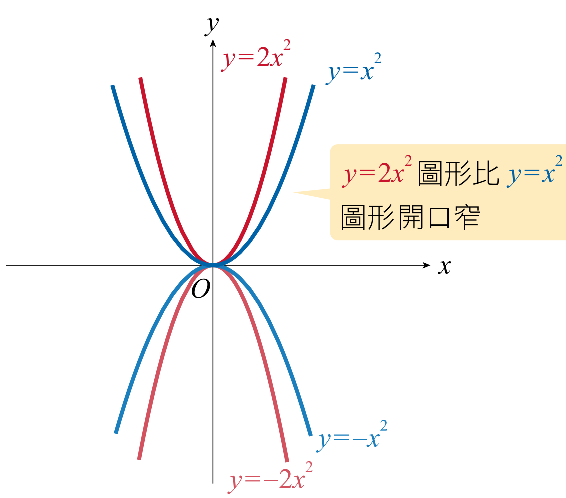
性質　二次函數圖形特徵

二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$（a、b、c 是實數且 $a\neq 0$），其圖形為拋物線

(1) **$a>0$ 時，拋物線開口向上，有最低點**

(2) **$a<0$ 時，拋物線開口向下，有最高點**

由觀察 $f(x)=ax^2$ 著手，我們分別令 $a=1$，$a=2$，$a=-1$ 及 $a=-2$，以描點法將函數 $f(x)=x^2$，$f(x)=2x^2$，$f(x)=-x^2$ 及 $f(x)=-2x^2$ 圖形描繪在同一坐標平面上，如圖 6 所示。



▲ 圖6

我們發現函數 $f(x)=ax^2$ 圖形以 y 軸（$x=0$）為對稱軸，頂點坐標為 $(0,0)$，且拋物線開口大小與 a 值密切相關，當 $|a|$ 愈大，開口反而愈小。接著再探索一些重要性質，請看下例：

例 5 **試以 $f(x)=x^2$ 為基礎，分別畫出下列圖形：**

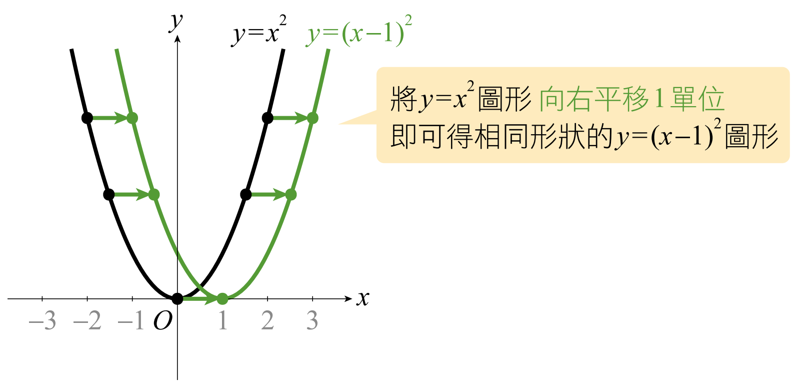
(1) $f(x)=(x-1)^2$　　(2) $f(x)=x^2+1$

解

(1) 運用描點法將同一自變數 x 關於函數 $f(x)=x^2$ 與 $f(x)=(x-1)^2$ 所對應之函數值列表如下：

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$f(x)=x^2$	…	9	4	1	0	1	4	9	…
$f(x)=(x-1)^2$	…	16	9	4	1	0	1	4	…

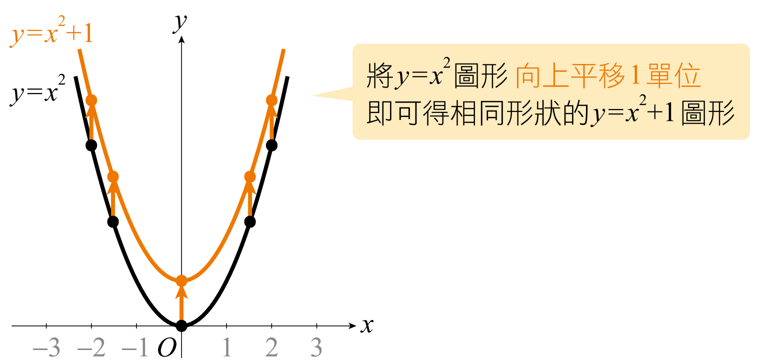
描點後以平滑曲線依序把各點連接起來，如下圖



(2) 運用描點法將同一自變數 x 關於函數 $f(x)=x^2$ 與 $f(x)=x^2+1$ 所對應之函數值列表如下：

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$f(x)=x^2$	…	9	4	1	0	1	4	9	…
$f(x)=x^2+1$	…	10	5	2	1	2	5	10	…

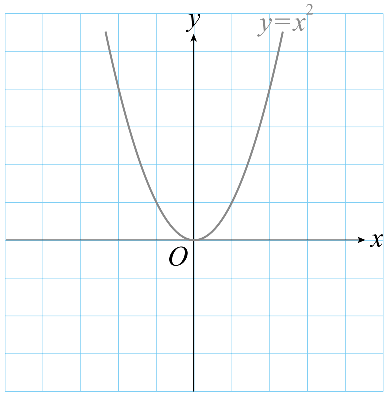
描點後以平滑曲線依序把各點連接起來，如下圖



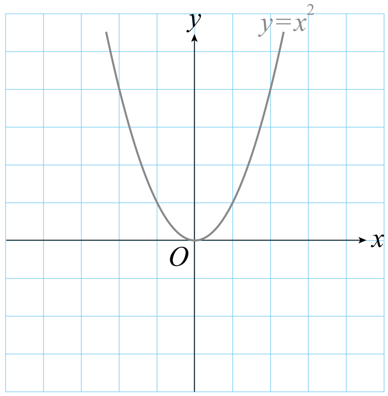
類題

5. 試以 $f(x)=x^2$ 為基礎，分別畫出下列圖形：

(1) $f(x)=(x+2)^2$



(2) $f(x)=x^2-2$



函數圖形是函數的一種幾何表達式，它讓我們對函數的變化趨勢有直觀的理解與掌握，藉由上面的例題 5，我們歸納出下面性質：

性質　函數平移

(1) **將函數 $y=f(x)$ 圖形向右平移 h 單位，向上平移 k 單位，則平移後之新函數為 $y-k=f(x-h)$**

(2) **將函數 $y=f(x)$ 圖形向左平移 h 單位，向下平移 k 單位，則平移後之新函數為 $y+k=f(x+h)$**

例 6　**將二次函數 $y=x^2+4x-1$ 圖形向右平移 1 單位再向上平移 2 單位，求平移後的新函數。**

解　將原函數右移 1 單位再上移 2 單位後之新函數為

$y-2=(x-1)^2+4(x-1)-1$

經過整理可得 $y-2=\left(x^2-2x+1\right)+4x-4-1$

亦即 $y=x^2+2x-2$

類題

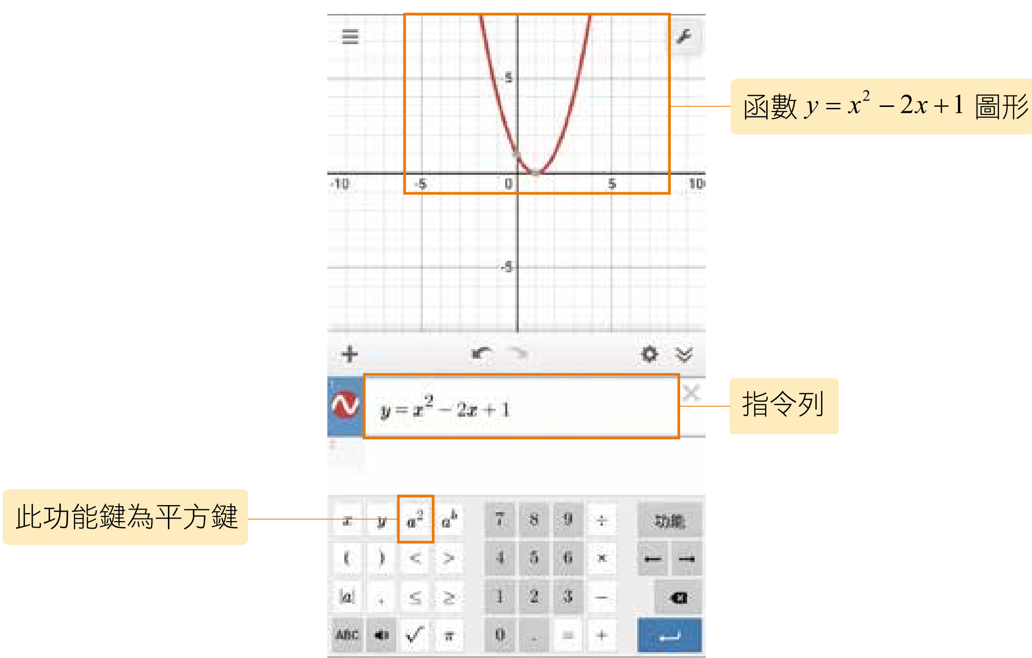
6. 將二次函數 $y=x^2+2x+k$ 圖形向左平移 2 單位再向下平移 3 單位後所得的新函數為 $y=x^2+6x+10$，試求 k 值。

透過幾何圖形的詮釋可以讓我們更深入體會數學抽象的意涵。這邊介紹一款免費且方便好用的數學繪圖 APP，可至應用程式商店下載並安裝「Desmos Graphing Calculator」。

App Store 下載

Google Play 立即下載

我們示範如何利用 **Desmos** 描繪二次函數圖形，舉 $y=x^2-2x+1$ 為例，開啟 APP 後，在指令列輸入數學式「$\boxed{y}\ \boxed{=}\ \boxed{x}\ \boxed{a^2}\ \boxed{-}\ \boxed{2}\ \boxed{x}\ \boxed{+}\ \boxed{1}$」，則顯示圖形如下：



▲ 圖7

其操作介面簡單易懂，同學不妨做中學、學中做，自己多練習。

接下來，我們複習如何以配方法求得二次函數的頂點坐標：

$$y=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c$$ 將領導係數 a 提出

$$=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+c$$ 抓一次項係數一半的平方進行配方

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

故可求出拋物線的**頂點坐標為** $\left(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$，且對稱軸為 $x=-\frac{b}{2a}$。

例 7 世界知名的西班牙建築大師高第擅長運用拋物線的弧面結構來展現藝術特色，假設高第早期某件作品的曲線符合二次函數 $y=-2x^2+4x+9$，請幫忙找出其最高點。

解 利用配方法

$$y=-2x^2+4x+9=-2\left(x^2-2x\right)+9$$ 將領導係數 -2 提出，再抓一次項係數一半的平方進行配方

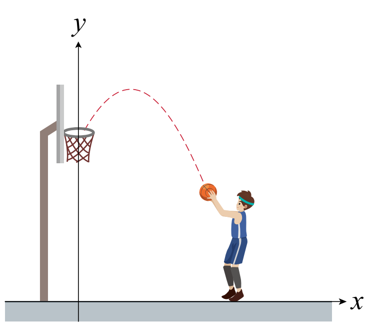
$$=-2\left(x^2-2x+1^2-1^2\right)+9$$

$$=-2(x-1)^2+11$$ 頂點坐標為 $(1,11)$

故其最高點為 $(1,11)$

類題

7. 小明常利用課餘時間在籃球場上練習投籃，假設籃球在飛行途中與籃框的水平距離為 x 公尺，且距離地面的高度為 y 公尺。已知小明某次出手投籃時其 x、y 滿足 $y=-x^2+2x+3$ 之關係式，試求此籃球在飛行路徑中之最高點距離地面多少公尺？



關於二次函數在實務上的應用，我們舉例示範如下：

例 8 **為了提升市民居住的生活品質，市府團隊規劃了一處預定地，打算修建一個休閒文化廣場，同時在周圍開闢一塊長為 x 公尺，寬為 $80-x$ 公尺的矩形園地，其內種植花卉、栽培苗木，並鋪設鵝卵石。**

(1) 已知此矩形園地平均每平方公尺的造價為 3000 元，假設該工程的總造價為 y 元，試列出 y 與 x 的函數關係式。

(2) 若該工程市府編列了 500 萬元預算，試問此預算是否足夠支付此項工程的建設經費？請加以說明。

解 (1) 矩形園地之面積為 $x(80-x)$

則總造價為 $y=3000x(80-x)=-3000x^2+240000x$，$40\le x<80$

(2) $y=-3000x^2+240000x=-3000\left(x^2-80x+40^2\right)+3000\times1600$

$=-3000(x-40)^2+4800000$

當 $x=40$ 時，總造價最多為 480 萬元

顯然 500 萬元預算足夠支付該工程款項

類題

8. 已知某汽車租賃公司每日收益 y 元與平均每輛汽車的日租金 x 元之間的關係式為 $y=-\dfrac{x^2}{400}+15x-2500$，$x>0$，則平均每輛車的日租金為多少元時，租賃公司的日收益最多？且最大收益為何？

觀念九宮格

試判斷下列各題之對錯，並在右圖九宮格中相應的題號位置，正確的畫「〇」，錯誤的畫「×」，看能否連成一線。

1	〇	2
〇	3	×
4	×	5

☐ (1) 函數圖形與垂直 x 軸的任意一條直線至多只有一個交點。

☐ (2) 函數 $f(x)=x^2+3x+1$，若 $a\neq b$，則 $f(a)\neq f(b)$。

☐ (3) 二次函數 $y=x^2+2x+5$ 之圖形與 x 軸不相交。

☐ (4) 已知 y 是 x 的函數，則 x 也會是 y 的函數。

☐ (5) 已知 $a\neq 0$，則 $y=-2ax^2$ 比 $y=-ax^2$ 的開口狹窄。

數學檔案 FILE

德國數學家萊布尼茲首次提出「function」術語，而數學家尤拉把函數表成 $f(x)$，後來傳到中國，清朝李善蘭將 function 譯成函數：「凡此變數中函彼變數，則此為彼之函數」，之後函數一詞便沿用至今。

習題 1-3

基礎題

1 已知攝氏溫度 x 與華氏溫度 y 之換算關係滿足一次函數 $y=\frac{9}{5}x+32$，當攝氏溫度控制在 25 度時人體感覺清爽舒適，試求此時華氏溫度為多少？

2 已知一次函數 $f(x)=ax+3$ 通過 $(1,5)$ 及 $(2,b)$ 兩點，試求 a、b 之值。

3 人的「肱骨」是手臂從「肘部到肩部」的骨頭，人類學家用肱骨的長度來估計男性或女性的身高，其線性關係如下：

男性身高 $M(x)=2.89x+70.64$（公分）

女性身高 $F(x)=2.75x+71.48$（公分）

其中 x 代表肱骨的長度。若考古學家發現一根長 30 公分的肱骨，試推估：

(1) 若是男性，他的身高為何？

(2) 若是女性，她的身高為何？

4 設函數 $f(x)=|x-1|$，試求 $f(-2)$。

5 設函數 $f(x)=\begin{cases}3x+2 & ,\ x>1\\ x^2 & ,\ x\le 1\end{cases}$，試求 $f(4)+f(-4)$ 之值。

6 已知二次函數 $y=x^2+ax+b$ 之頂點坐標為 $(1,5)$，試求 a、b 之值。

雲端教室

7 試求二次函數 $y=2x^2+6x+7$ 的最小值。

8 將二次函數 $y=x^2+3x-5$ 的圖形右移 2 個單位，再上移 k 個單位後，與 $y=x^2-x+4$ 的圖形重疊，試求 k 值。

進階題

9 設計高空煙火時，會期望它在最高點時爆裂，假設煙火距地面高度 y 公尺與時間 t 秒的關係式為 $y(t)=-4.9t^2+14.7t+18.6$，試利用計算機求出最佳爆裂高度。

10 假設某科技大學的網路流量統計，流量在凌晨零點到上午八點的 8 個小時內，某 IP 位址關於時間 t 的流量可用下列函數表示：

$$f(t)=\frac{3}{2}t^2-9t+\frac{37}{2}\text{，}0\le t\le 8\text{（單位：MB）}$$

例如：$f(0)$ 表示凌晨零點的流量；$f(6)$ 表示上午六點的流量。試求該 IP 位址在這段時間內的最小流量。