

# 2-2 直線方程式



點與直線是最基本的幾何圖形元素，平面上相異兩點，可決定一條直線，本節我們將在直角坐標上討論直線，把幾何圖形「直線」用代數「方程式」來描述。

如何在直角坐標上描述直線呢？我們將融入直線斜率的概念與截距的意義，探討各種直線方程式的形式與求法。



▲ 圖1

## 2-2.1 點斜式

由直線上**一定點**及其**斜率**所決定的直線方程式，稱為「點斜式」。

假設直線  $L$  通過  $A(-1,2)$ ，且其斜率為  $\frac{2}{3}$ 。

若  $P(x,y)$  是  $L$  上任意一點，則

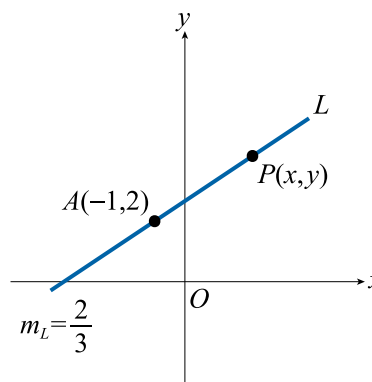
$\overline{AP}$  的斜率 =  $L$  的斜率

$$\text{即 } \frac{y-2}{x-(-1)} = \frac{2}{3}$$

因此通過  $A(-1,2)$  且斜率為  $\frac{2}{3}$  的直線  $L$  的方程式為

$$y-2 = \frac{2}{3}[x-(-1)]$$

這種形式的方程式稱為直線的「點斜式」。

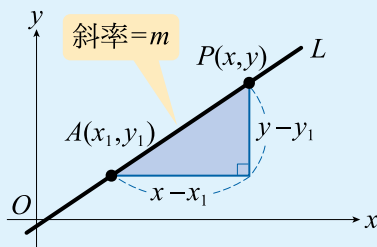


▲ 圖2

仿照上面的作法我們可以得到以下的結果。

●●● 點斜式

設直線  $L$  過點  $A(x_1, y_1)$ ，且斜率為  $m$ ，  
則直線  $L$  的方程式為  
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$



▲ 圖3

例

1

- (1) 試求過點  $(2, -3)$ ，且斜率為  $-\frac{1}{2}$  的直線方程式。
- (2) 試求過點  $(-1, 4)$ ，且斜率為  $2$  的直線方程式。

**解** 由點斜式知：

(1) 直線方程式為

$$y - (-3) = -\frac{1}{2} \times (x - 2)$$

將  $(x_1, y_1) = (2, -3)$ ， $m = -\frac{1}{2}$   
代入  $y - y_1 = m(x - x_1)$

整理得  $2y + 6 = -x + 2$ ，移項得  $x + 2y + 4 = 0$

(2) 直線方程式為

$$y - 4 = 2 \times [x - (-1)]$$

將  $(x_1, y_1) = (-1, 4)$ ， $m = 2$   
代入  $y - y_1 = m(x - x_1)$

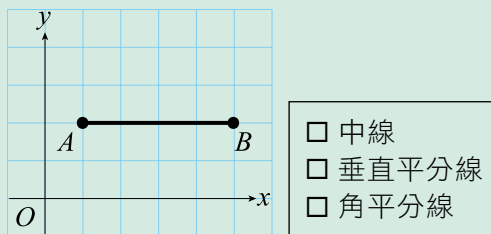
整理得  $y - 4 = 2x + 2$ ，移項得  $2x - y + 6 = 0$

隨堂練習

1. (1) 試求過點  $(-5, 1)$ ，且斜率為  $3$  的直線方程式。
- (2) 試求過點  $(1, -3)$ ，且斜率為  $-\frac{2}{3}$  的直線方程式。

### 動手

請試著畫出一條通過  $\overline{AB}$  上的直線，而此直線上的任意一點到  $A$ 、 $B$  兩點的距離相等，並勾選  這條直線的名稱。



▲ 圖4

例

2

如圖，已知平面上兩鄉鎮的位置為  $A(-1,1)$ 、 $B(3,3)$ ，今兩鄉鎮市民希望在鐵路沿線上設立一車站，此車站位於與兩鄉鎮距離相同的直線道路上，試求此車站所在的直線道路方程式。

**解** 由題意可知：

車站  $C$  位於  $\overline{AB}$  的垂直平分線上

$\overline{AB}$  的中點為  $\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = (1, 2)$

$\overline{AB}$  的斜率  $m = \frac{3-1}{3-(-1)} = \frac{1}{2}$

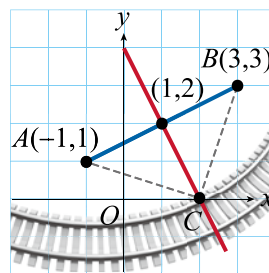
又兩互相垂直直線，其斜率相乘等於  $-1$

所以  $\overline{AB}$  之垂直平分線的斜率為  $-2$

由點斜式，得所求方程式為  $y - 2 = -2(x - 1)$

整理得  $y - 2 = -2x + 2$ ，移項得  $2x + y - 4 = 0$

故車站所在的道路直線方程式為  $2x + y - 4 = 0$



若  $L$  是  $\overline{AB}$  的垂直平分線，則  $L \perp \overline{AB}$  且  $L$  通過  $\overline{AB}$  的中點

#### 隨堂練習

2. 設  $A(-2,1)$ 、 $B(2,3)$ ，試求  $\overline{AB}$  之垂直平分線方程式。



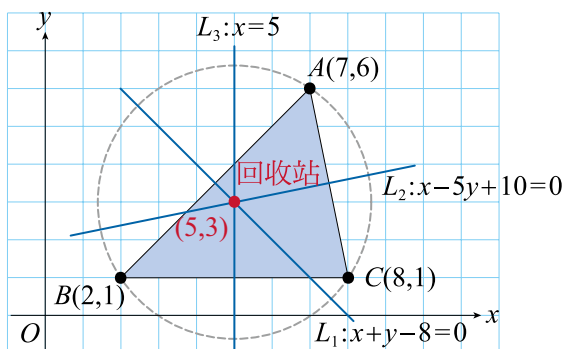
## 數學跨出界

### 環境教育—永續發展的因應

近年各縣市垃圾大戰愈演愈烈，政府倡導「垃圾減量、資源回收」政策，希望達到永續發展。某區要為  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三個里設置大型回收站，為了三個里都方便及公平性，此回收站選在距離三個里等距離的地方。

若  $A$  的位置在  $(7,6)$ 、 $B$  的位置在  $(2,1)$ 、 $C$  的位置在  $(8,1)$ ，請問你會如何設置呢？

**解** 利用垂直平分線與外心的性質，即可找出最公平的設置地點。如下圖所示：



▲ 圖5

由點斜式可知，只要知道直線上的一點與其斜率就可求出直線方程式。



如果我們已知直線上相異兩點，可以利用點斜式求出其直線方程式嗎？

假設直線  $L$  通過  $A(x_1, y_1)$  與  $B(x_2, y_2)$  兩點，其中  $x_1 \neq x_2$ ，由下面兩個步驟即可求得  $L$  的方程式：

(1) 先求出直線  $L$  的斜率  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ 。

(2) 再利用點斜式  $y - y_1 = m(x - x_1)$ 。

我們也可以用點  $(x_2, y_2)$ ，  
即  $y - y_2 = m(x - x_2)$

例

3

試求通過  $A(3, -1)$ 、 $B(2, 1)$  兩點的直線方程式。

解

$$\overline{AB} \text{ 的斜率 } m = \frac{1 - (-1)}{2 - 3} = -2$$

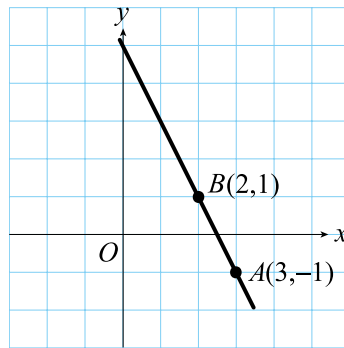
由點斜式，得所求方程式為

$$y - (-1) = -2(x - 3)$$

點斜式  
 $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$\text{整理得 } y + 1 = -2x + 6$$

$$\text{移項得 } 2x + y - 5 = 0$$



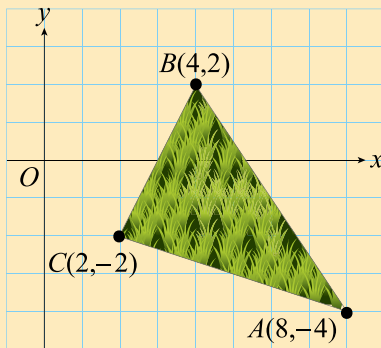
隨堂練習

3. 試求通過  $A(-3, 1)$ 、 $B(2, 4)$  兩點的直線方程式。

例

4

某農夫有塊三角形農地  $ABC$ ，如圖所示，在平面上的坐標位置為  $A(8, -4)$ 、 $B(4, 2)$ 、 $C(2, -2)$ 。今農夫欲將農地沿著過  $B$  點的直線平均分給兩個兒子耕種，試求平分農地的直線方程式為何？



**解** 所求直線為  $\overline{AC}$  邊上的中線，

$\overline{AC}$  的中點為

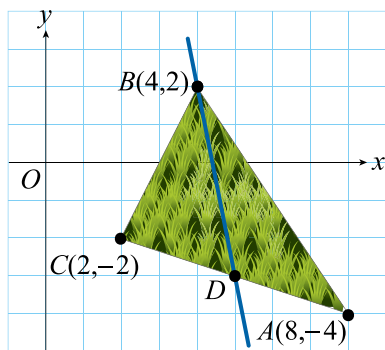
$$D\left(\frac{8+2}{2}, \frac{-4+(-2)}{2}\right) = (5, -3)$$

$$\text{直線 } BD \text{ 的斜率 } m_{BD} = \frac{-3-2}{5-4} = -5$$

由點斜式，得所求方程式為

$$y - (-3) = -5(x - 5) \Rightarrow y + 3 = -5x + 25$$

$$\text{整理得 } 5x + y - 22 = 0$$



若  $\overline{BD}$  是  $\triangle ABC$  中， $\overline{AC}$  邊上的中線，則  $\overline{AD} = \overline{CD}$

隨堂練習

4. 已知  $\triangle ABC$  三頂點坐標分別為  $A(-1, 1)$ 、 $B(4, -2)$ 、 $C(-2, -4)$ ，試求  $\overline{BC}$  邊上之中線方程式。



## 數學跨出界

### 數學素養—遶境路線

臺中大甲鎮瀾宮媽祖遶境活動，近年來被 Discovery 探索頻道認為是世界三大宗教盛事。今年廖老師有幸參加媽祖遶境活動，從大甲鎮瀾宮出發，經過西螺福興宮，最後到達新港奉天宮，若這三站在坐標平面的坐標位置分別為  $A(2,8)$ 、 $O(0,0)$ 、 $B(-1,-3)$ 。今廖老師在坐標平面上將  $A$  點：大甲鎮瀾宮、 $B$  點：新港奉天宮兩點用直線連接起來，試問  $O$  點：西螺福興宮是否在這條直線上？



▲ 圖6

解  $m_{AB} = \frac{-3-8}{-1-2} = \frac{11}{3}$

直線  $AB$  的方程式為  $y-8 = \frac{11}{3}(x-2)$ ，即  $3y-24 = 11x-22$

移項得  $11x-3y+2=0$ ，將點  $O(0,0)$  代入  $11x-3y+2$

得  $11 \times 0 - 3 \times 0 + 2 = 2 \neq 0$ ，故點  $O(0,0)$  不在直線  $\overline{AB}$  上

所以西螺福興宮不會在大甲鎮瀾宮與新港奉天宮的連線上

【補充說明】亦可以利用三點共線，斜率相等的性質驗證。

## 2-2.2 水平線與鉛直線的直線方程式

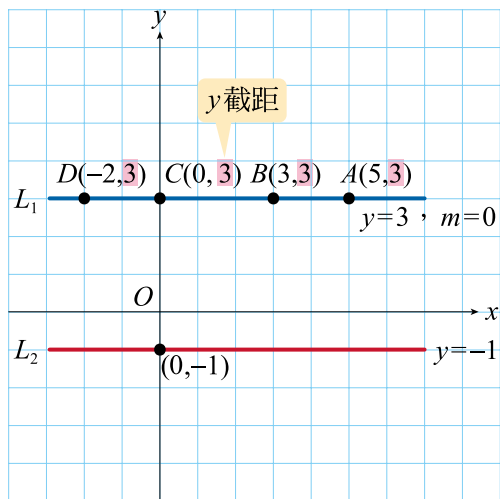
### 1. 水平線

一條平行於  $x$  軸的直線稱為水平線，其斜率為  $0$ 。

考慮如圖 7 中的水平線  $L_1$  與  $L_2$ 。由圖形可見， $L_1$  上所有點的  $y$  坐標都等於  $3$ 。因此我們以  $y = 3$  來表示直線  $L_1$  的方程式。同樣的， $L_2$  的方程式為  $y = -1$ 。

一般來說， $y$  截距為  $k$  的水平線其方程式為：

$$y = k \leftarrow \dots \dots \dots \text{ } x \text{ 軸的直線方程式為 } y = 0$$



▲ 圖7

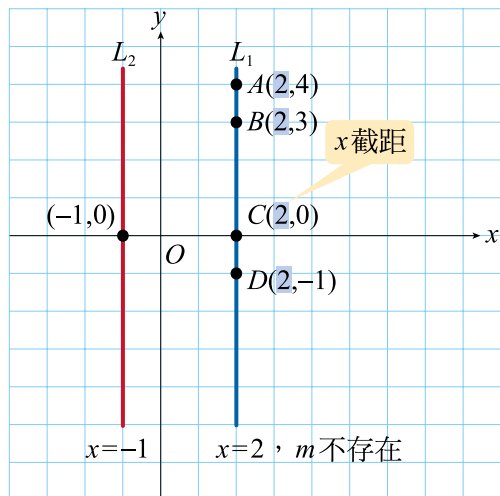
### 2. 鉛直線

一條平行於  $y$  軸的直線稱為鉛直線，其斜率不存在。

考慮如圖 8 中的鉛直線  $L_1$  與  $L_2$ 。由圖形可知， $L_1$  上所有點的  $x$  坐標都等於  $2$ 。因此我們以  $x = 2$  來表示直線  $L_1$  的方程式。同樣的， $L_2$  的方程式為  $x = -1$ 。

一般來說， $x$  截距為  $h$  的鉛直線其方程式為：

$$x = h \leftarrow \dots \dots \dots \text{ } y \text{ 軸的直線方程式為 } x = 0$$



▲ 圖8

#### 【補充說明】

由於鉛直線的斜率是不存在的，因此無法根據點斜式來求得其方程式。



例

5

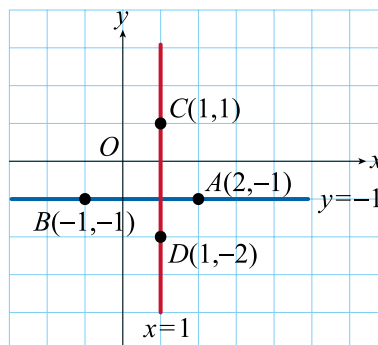
試求通過下列兩點的直線方程式：

(1)  $A(2, -1)$ 、 $B(-1, -1)$

(2)  $C(1, 1)$ 、 $D(1, -2)$

解 (1) 過  $A$ 、 $B$  兩點之直線上的任一點的  $y$  坐標都是  $-1$ 所以直線方程式為  $y = -1$ (此為水平線，斜率為  $0$ )(2) 過  $C$ 、 $D$  兩點之直線上的任一點的  $x$  坐標都是  $1$ 所以直線方程式為  $x = 1$ 

(此為鉛直線，斜率不存在)



## 隨堂練習

5. 試求通過下列兩點的直線方程式：

(1)  $A(-3, 2)$ 、 $B(-3, 4)$

(2)  $C(5, -2)$ 、 $D(3, -2)$

## 2-2.3 斜截式

假設直線  $L$  的斜率為  $m$ ，且其  $y$  截距為  $b$ 。因為  $L$  的  $y$  截距為  $b$ ，所以  $L$  與  $y$  軸相交於  $(0, b)$ ，若  $P(x, y)$  是  $L$  上任意一點，則

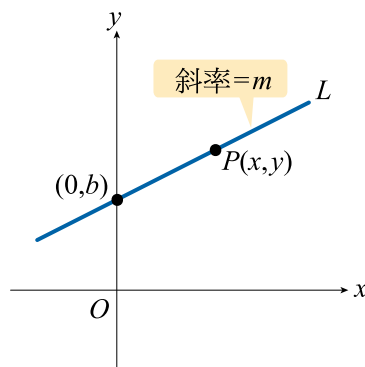
$$y - b = m(x - 0) \quad \leftarrow \text{根據點斜式}$$

因此斜率為  $m$  且  $y$  截距為  $b$  的直線  $L$  其方程式為

$$y = mx + b$$

這種形式的方程式稱為直線的「斜截式」。

事實上，斜截式只是點斜式的延伸而已。



▲ 圖9

### ●●● 斜截式

設直線  $L$  的斜率為  $m$ ，且其  $y$  截距為  $b$ ，則直線  $L$  的方程式為

$$y = mx + b$$

例

6

(1) 試求斜率為  $\frac{1}{2}$  且  $y$  截距為  $-3$  的直線方程式。

(2) 試求斜率為  $-2$  且  $x$  截距為  $2$  的直線方程式。

**解** (1) 由斜截式

得直線方程式為  $y = \frac{1}{2}x - 3$

將  $m = \frac{1}{2}$ ， $b = -3$   
代入  $y = mx + b$

整理得  $x - 2y - 6 = 0$

(2) 直線的  $x$  截距為  $2$

表示直線通過點  $(2, 0)$

由點斜式

得所求方程式為  $y - 0 = -2(x - 2)$

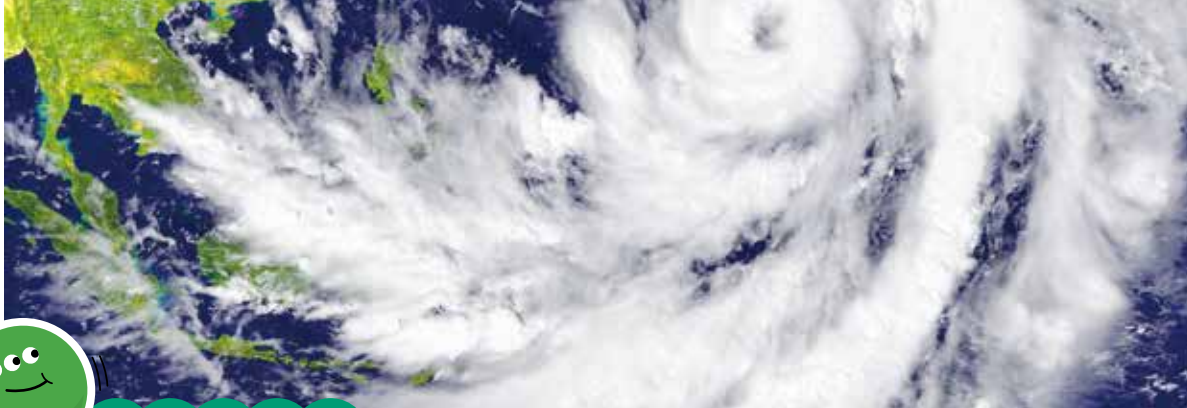
點斜式：  
 $y - y_1 = m(x - x_1)$

整理得  $2x + y - 4 = 0$

#### 隨堂練習

6. (1) 試求斜率為  $-3$  且  $y$  截距為  $2$  的直線方程式。

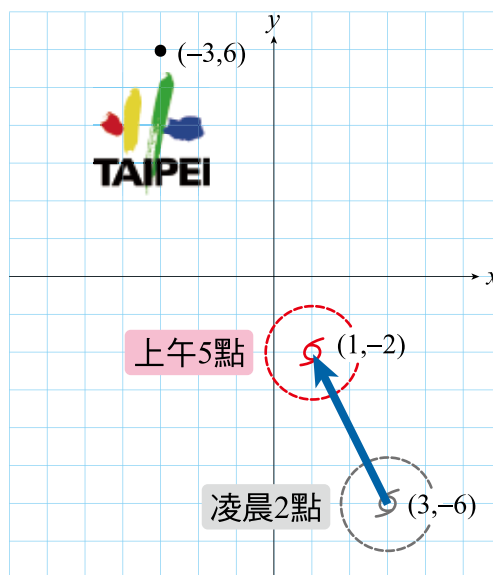
(2) 試求斜率為  $\frac{3}{2}$  且  $x$  截距為  $-3$  的直線方程式。



## 數學跨出界

### 數學素養—推估颱風路徑

夏秋之際，臺灣易受颱風侵襲，依影響程度及行進路線決定是否放假。假設今有麗緹颱風出現在坐標上，凌晨 2 點颱風中心位置在  $(3, -6)$ ，上午 5 點在  $(1, -2)$ ，以等速直線行進，若臺北市的坐標位置在  $(-3, 6)$ ，身為市民的你是否需要做好萬全的防颱準備？



▲ 圖10

解

設颱風的行進路線之直線方程式為

$$y = ax + b$$

又颱風通過  $(3, -6)$ 、 $(1, -2)$  兩點

$$\text{代入得} \begin{cases} -6 = 3a + b \\ -2 = a + b \end{cases}$$

解聯立得  $a = -2$ ， $b = 0$

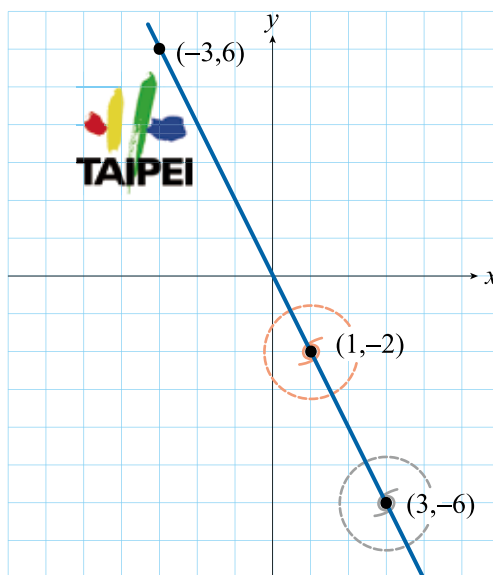
即直線方程式為  $y = -2x$

又臺北市的位置在  $(-3, 6)$

將  $x = -3$  代入，得  $y = -2 \times (-3) = 6$

即點  $(-3, 6)$  在直線  $y = -2x$  上

所以颱風中心將通過臺北市，需做好萬全的防颱準備



▲ 圖11

## 2-2.4 截距式

設直線  $L$  的  $x$  截距為  $a$ ， $y$  截距為  $b$ ，且  $ab \neq 0$ ，  
即直線  $L$  通過點  $A(a, 0)$ 、 $B(0, b)$  兩點，則其斜率

$$m = \frac{0 - b}{a - 0} = -\frac{b}{a}。$$

由點斜式，得直線方程式為  $y - 0 = -\frac{b}{a}(x - a)$

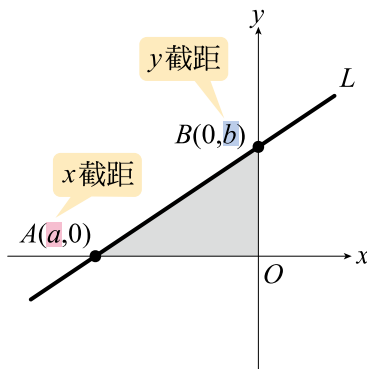
整理得  $bx + ay = ab$ ，等式兩邊同除以  $ab$ ，得

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

這種形式的方程式稱為直線的「截距式」。

事實上，截距式亦是點斜式的延伸。

由圖 12 可知，直線  $L$  與兩坐標軸所圍成的三角形區域面積 =  $\frac{1}{2} \times |a| \times |b|$ 。



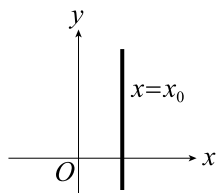
▲ 圖12

### ●●● 截距式

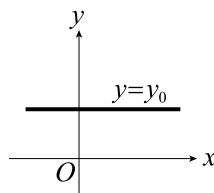
設直線  $L$  的  $x$  截距為  $a$ ， $y$  截距為  $b$ ，且  $ab \neq 0$ ，則直線  $L$  的方程式為

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

由截距式方程式可知，截距式只能表示在  $x$  軸、 $y$  軸上的截距都存在且不為 0 的直線。因此，截距式不能表示通過原點的直線、與  $x$  軸垂直的直線、與  $y$  軸垂直的直線。過原點的直線可以表示為  $y = kx$ ，與  $x$  軸垂直的直線可以表示為  $x = x_0$ （圖 13），與  $y$  軸垂直的直線可以表示為  $y = y_0$ （圖 14）。



▲ 圖13



▲ 圖14

例

7

已知一直線  $L$  的  $x$  截距為 2， $y$  截距為  $-3$ ，試求：

- (1) 直線  $L$  的方程式。
- (2) 直線  $L$  與兩坐標軸所圍成的三角形面積。

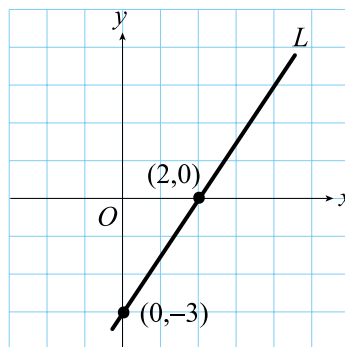
**解** (1)  $a = 2$ ， $b = -3$

由截距式，得直線  $L$  方程式為

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{(-3)} = 1 \text{ 整理得 } \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$$

等式兩邊同乘以 6，得  $3x - 2y = 6$

移項得  $3x - 2y - 6 = 0$



(2) 所求面積 =  $\frac{1}{2} \times |2| \times |-3| = 3$  (平方單位)

**隨堂練習** .....

7. 已知一直線  $L$  的  $x$  截距為  $-1$ ， $y$  截距為 5，試求：

- (1) 直線  $L$  的方程式。
- (2) 直線  $L$  與兩坐標軸所圍成的三角形面積。



愛無限

這一節教授了幾個求直線方程式的方法，請每個人各分享一個

17:20



空幻想

點斜式： $y - y_1 = m(x - x_1)$

17:30



拍門陣

斜截式： $y = mx + b$

17:35



希塔嬌

截距式： $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

17:40



愛無限

大家就利用上面 3 個方法分辨以下敘述是否正確？

對的打勾 ，錯的打叉

1. 通過點  $A(-1, 2)$  且斜率為  $\frac{2}{3}$  的直線  $L$  之方程式為

$$y - 2 = \frac{2}{3}[x - (-1)]$$

2. 斜率為  $\frac{1}{2}$  且  $y$  截距為  $-3$  的直線方程式為  $y = \frac{1}{2}x + (-3)$

3. 直線  $L$  的  $x$  截距為  $2$ ， $y$  截距為  $-3$ ，則直線方程式為

$$\frac{x}{2} - \frac{y}{-3} = 1$$

18:00

輸入訊息 >



## 2-2 習題

雲端教室



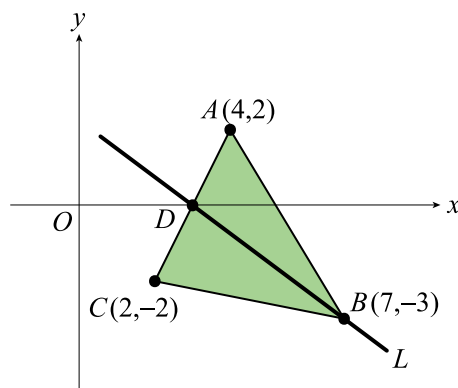
### 基礎題

- 1 試求過點 $(2, -1)$ 且斜率為 $\frac{1}{2}$ 的直線方程式。
- 2 試求過點 $(1, -2)$ 且斜率為 $-3$ 的直線方程式。
- 3 設 $A(-1, 1)$ 、 $B(3, -1)$ ，求 $\overline{AB}$ 之垂直平分線方程式。
- 4 試求過點 $A(2, -1)$ 與 $B(0, 3)$ 之直線方程式。
- 5 試求過 $C(-3, 2)$ 與 $D(-3, -1)$ 兩點之直線方程式。
- 6 試求斜率為 $-\frac{2}{3}$ 且 $y$ 截距為 $-1$ 的直線方程式。
- 7 試求斜率為 $3$ 且 $x$ 截距為 $5$ 的直線方程式。

- 8 設直線  $L: 2x - 7y - 14 = 0$ ，試求：
- (1) 直線  $L$  化成截距式。
  - (2) 直線  $L$  與兩坐標軸所圍成的三角形面積。

**進階題**

- 9 如圖所示，某校農藝科在校園角落有塊三角形農地，在平面上的坐標位置為  $A(4, 2)$ 、 $B(7, -3)$ 、 $C(2, -2)$ 。今科主任欲將此農地平均分給甲、乙兩個班種植蔬菜，若點  $D$  在  $\overline{AC}$  上，試求平分農地面積的直線  $BD$  之方程式為何？



- 10 若直線  $L$  在兩坐標軸上的截距和為 6，且  $L$  之斜率為  $\frac{3}{2}$ ，則  $L$  之方程式為何？

**熟習度自評表**

- Awesome
- Excellent
- Good
- Average
- Poor